खंड-3

संख्या और मान

भारतीय विमर्श

सनातन ज्ञान : युवा उत्थान

भारतीय ज्ञान प्रणाली आधारित प्रतियोगी परीक्षाओं
(नेट और यूपीएससी) के लिए एक संक्षिप्त पुस्तक

Scanned by
AnyScanner

संख्या और मान
भारतीय विमर्श

भारतीय ज्ञान प्रणाली आधारित प्रतियोगी परीक्षाओं (नेट और यूपीएससी)
के लिए एक संक्षिप्त पुस्तक

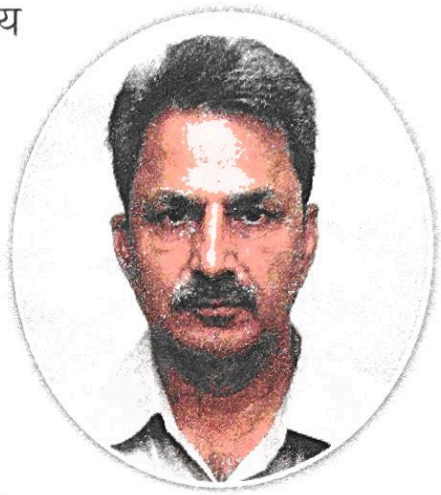
विद्या भारती
उच्च शिक्षा संस्थान
सा विद्या या विमुक्तये

किताबवाले
नयी दिल्ली-110002

Scanned by
AnyScanner

शुभकामना संदेश

प्रिय मित्रों,



यह मेरे लिए अत्यंत हर्ष और गौरव का विषय है, साथ ही एक गहरा उत्तरदायित्व भी, कि मैं आपके समक्ष **'भारत बौद्धिक्स'** परियोजना को प्रस्तुत कर रहा हूँ। **भारत बौद्धिक्स विद्या भारती उच्च शिक्षा संस्थान** द्वारा प्रारंभ किया गया एक राष्ट्रीय शैक्षिक अभियान है, जिसका मुख्य उद्देश्य हमारे युवाओं को गुणात्मक, सर्वांगीण और समग्र विकास की शिक्षा के साथ-साथ उनके मन और मस्तिष्क में भारत की बौद्धिक और सांस्कृतिक चेतना को पुनर्जीवित करना है।

जैसा कि हम सभी जानते हैं, विज्ञान, दर्शन, शासन, आरोग्य और कला जैसे अनेक क्षेत्रों में भारतीय ज्ञान परंपराएँ हजारों वर्षों से मानवता का मार्गदर्शन करती रही हैं। आज जब पूरी दुनिया एक संतुलित, नैतिक और समावेशी विकास मॉडल की खोज में है, ऐसे समय में हमारे प्राचीन ग्रंथ और विचार केवल इतिहास की धरोहर नहीं रह गए हैं, बल्कि वे प्रेरणा और नवाचार के जीवंत स्रोत बनकर सामने आ रहे हैं। भारत बौद्धिक्स का प्रयास है कि इस अमूल्य विरासत को आज के विद्यार्थियों के लिए सुलभ, समसामयिक और सार्थक रूप में प्रस्तुत किया जाए।

हमारे विशेषज्ञों द्वारा तैयार की गई **21 पुस्तकों की एक विशेष श्रृंखला,** इस परियोजना का मूल आकर्षण है। जिसे तीन प्रमुख क्षेत्रों में वर्गीकृत किया गया है:

1. **विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी**: इस खंड में वैदिक गणित, खगोलशास्त्र, आयुर्वेद, धातु विज्ञान, मंदिर वास्तुकला और पारंपरिक पर्यावरण ज्ञान जैसे विषयों के माध्यम से भारत की वैज्ञानिक परंपराओं को उजागर किया गया है।
2. **कला एवं मानविकी**: यह खंड नाट्यशास्त्र, शास्त्रीय भाषाओं, संगीत, साहित्यिक परंपराओं और प्रदर्शन कलाओं के माध्यम से भारत की सांस्कृतिक समृद्धि और सौंदर्यबोध को प्रतिबिंबित करता है।

Scanned by AnyScanner

3. **समाजशास्त्र एवं अर्थनीति**: इसमें राजधर्म, अर्थशास्त्र, कृषि, ग्रामीण उद्योग, और शासन-प्रणाली जैसे विषयों को शामिल किया गया है, जो संतुलित और नैतिक समाज निर्माण की दिशा में मार्गदर्शन प्रदान करते हैं।

इन पुस्तकों के माध्यम से युवाओं की सक्रिय भागीदारी सुनिश्चित करने हेतु हम **23 जनवरी 2026**, नेताजी **सुभाष चंद्र बोस जी की जयंती** के अवसर पर, एक **राष्ट्रीय परीक्षा** का आयोजन कर रहे हैं। यह परीक्षा पूरे देश के स्नातक एवं स्नातकोत्तर विद्यार्थियों के लिए खुली होगी। इस परीक्षा का उद्देश्य केवल ज्ञान का मूल्यांकन करना नहीं है, बल्कि जिज्ञासा जगाना, आत्मचिंतन को प्रेरित करना, और भारतीय सभ्यता के गौरव के प्रति गर्व की भावना को जागृत करना है।

परीक्षा में उत्कृष्ट प्रदर्शन करने वाले विद्यार्थियों को **राष्ट्रीय भारत बौद्धिक्स कॉन्क्लेव** में आमंत्रित किया जाएगा। यह एक ऐसा मंच होगा जहाँ वे अपने विचार साझा करेंगे, मार्गदर्शकों से संवाद करेंगे और **भारतीय कला एवं समाज** भारतीय ज्ञान प्रणाली के जीवंत अनुभव से जुड़ सकेंगे। **भारत बौद्धिक्स** मात्र एक शैक्षिक कार्यक्रम नहीं, बल्कि यह एक **यात्रा है: ज्ञान से बोध की ओर**। यह हमें हमारे मूल से जुड़ने, अपने भविष्य की पुनर्कल्पना करने और भारत की आत्मा को पुनः समझने का अवसर देता है।

मैं देशभर के सभी छात्रों, शिक्षकों और शैक्षणिक संस्थानों से हार्दिक आग्रह करता हूँ कि वे इस पुनराविष्कार और परिवर्तन की यात्रा में हमारे सहभागी बनें। आइए हम मिलकर एक ऐसी पीढ़ी के निर्माण में सहायक बनें, जो बौद्धिक रूप से जागरूक, संस्कृति के प्रति संवेदनशील और वैश्विक दृष्टिकोण से उत्तरदायी हो।

सादर, सस्नेह

प्रो. कैलाश सी. शर्मा

अध्यक्ष, विद्या भारती उच्च शिक्षा संस्थान
अध्यक्ष, हरियाणा राज्य उच्च शिक्षा परिषद
पूर्व कुलपति, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

Scanned by AnyScanner

विषय सूची

	प्रस्तावना	9
	विद्या भारती उच्च शिक्षा संस्थान	11
1.	संख्यात्मक प्रणाली	13
	• भारत में संख्यात्मक प्रणाली का ऐतिहासिक प्रमाण	17
	• संख्यात्मक प्रणाली के प्रमाण	17
	• भारतीय संख्यात्मक प्रणाली के प्रमुख लक्षण	17
2.	शून्य का सिद्धांत और महत्व	18
	• बड़े अंकों का प्रतिनिधित्व	22
3.	प्राचीन भारतीय गणित में संख्याओं का स्थानीय मान	23
4.	दशमलव प्रणाली	24
5.	प्राचीन भारतीय गणित में संख्या का प्रतिनिधित्व	25
	• भूत-संख्या प्रणाली	25
	• कटपयादि प्रणाली: संख्याओं का प्रतिनिधित्व करने की एक अनूठी विधि	26
6.	प्राचीन भारतीय मापन प्रणाली	30
7.	प्राचीन भारतीय शास्त्रों में विज्ञान: मापन की दृष्टि से	31
8.	व्यापार, वाणिज्य और विज्ञान पर प्रभाव	35
9.	पिंगल के छन्दःशास्त्र और उनके गणितीय योगदान	35
	• गणितीय सिद्धांत और पिंगल का प्रभाव	36
	• पिंगल की धरोहर और आधुनिक गणित पर प्रभाव	37
10.	निष्कर्ष	37
	अनुशंसित पठन सामग्री	39
	बहुविकल्पीय प्रश्न	42
	उत्तरदर्शिका	63

Scanned by AnyScanner

प्रस्तावना

गणित, विज्ञान और प्रौद्योगिकी की सार्वभौमिक भाषा, प्राचीन सभ्यताओं में गहराई से जड़ें जमाए हुए है। इनमें से, भारत ने विशेष रूप से संख्या प्रणाली और मापन इकाइयों के विकास में उल्लेखनीय योगदान दिया है, जिसने आधुनिक वैज्ञानिक सोच को महत्वपूर्ण रूप से आकार दिया है। यह पुस्तक संख्यात्मक प्रणालियों की रोचक यात्रा, शून्य की उत्पत्ति, और प्राचीन भारत में विकसित परिष्कृत मापन तकनीकों की पड़ताल करती है, जिससे उनके ऐतिहासिक महत्व और समकालीन गणित तथा संबंधित विषयों पर उनके गहरे प्रभाव को उजागर किया जा सके।

संख्या प्रणाली, जो भारत की सबसे महत्वपूर्ण बौद्धिक देनों में से एक है, सामान्य युग (Common Era) से बहुत पहले विकसित की गई थी। इसका प्रभाव भारतीय उपमहाद्वीप से आगे बढ़कर 8वीं शताब्दी ईस्वी में अरब विद्वानों तक पहुँचा और फिर 11वीं शताब्दी ईस्वी तक पश्चिमी देशों में फैल गया। दशमलव प्रणाली, स्थानीय मान (place value) की अवधारणा, और गणितीय इकाई के रूप में शून्य का आविष्कार भारत के क्रांतिकारी योगदानों में से हैं, जिन्होंने अंकगणित और बीजगणित को एक नया रूप दिया। यह पुस्तक इन उन्नतियों की गहन खोज करती है, जिसे ऐतिहासिक प्रमाणों, शिलालेखों और प्राचीन पांडुलिपियों के माध्यम से समर्थित किया गया है।

भास्कर द्वितीय और ब्रह्मगुप्त जैसे महान गणितज्ञों के कार्यों का अध्ययन किया गया है, ताकि यह समझा जा सके कि उनकी खोजों ने आधुनिक संगणनात्मक (computational) विधियों की नींव कैसे रखी। यह ग्रंथ यह भी दर्शाता है कि इन गणितीय सिद्धांतों को खगोलशास्त्र, वास्तुकला और व्यापार सहित विभिन्न क्षेत्रों में कैसे लागू किया गया। इसके अतिरिक्त, यह पुस्तक प्राचीन भारत में विकसित संख्यात्मक अभिव्यक्ति की विलक्षण विधियों जैसे कि भूतसंख्या और कटपयादि प्रणाली को प्रस्तुत करती है, जो संख्याओं को भाषायी और काव्यात्मक अभिव्यक्तियों से जोड़ती हैं। ऐसे बहु-विषयक दृष्टिकोण (interdisciplinary approach) गणित और संस्कृति के बीच

Scanned by AnyScanner

की बौद्धिक समन्वयता को दर्शाते हैं, जिससे भारतीय विद्वानों की सृजनात्मकता और बहुमुखी प्रतिभा का पता चलता है। संख्याओं से आगे बढ़कर, यह पुस्तक समय, दूरी और भार की प्राचीन भारतीय मापन प्रणालियों की भी पड़ताल करती है। यह व्यापार, अभियांत्रिकी (engineering) और वैज्ञानिक गणनाओं में उनकी भूमिका पर चर्चा करती है, जिससे यह पता चलता है कि प्रारंभिक भारतीय सभ्यताओं ने कितनी सटीकता और मानकीकरण (standardization) प्राप्त किया था।

इस ग्रंथ में पिंगल के संख्यात्मक गणित (combinatorial mathematics) और द्विआधारी प्रणाली (binary system) में योगदान पर भी चर्चा की गई है, जो यह दर्शाते हैं कि प्राचीन गणितीय विचारधारा आधुनिक कंप्यूटिंग और सूचना सिद्धांत (information theory) को आज भी कैसे प्रभावित करती है। इन ऐतिहासिक उपलब्धियों की जाँच करके, यह पुस्तक अतीत और वर्तमान के बीच एक सेतु स्थापित करने का प्रयास करती है, यह दर्शाते हुए कि प्राचीन भारतीय गणितीय सिद्धांत आज के तकनीकी परिदृश्य में कितने प्रासंगिक हैं।

हम आशा करते हैं कि यह पुस्तक उन सभी के लिए एक मूल्यवान संसाधन सिद्ध होगी, जो गणितीय विचारधारा के विकास और इसके विभिन्न वैज्ञानिक क्षेत्रों पर गहरे प्रभाव को समझने में रुचि रखते हैं। इन मौलिक अवधारणाओं को समझकर, पाठक उन बौद्धिक परंपराओं की गहरी सराहना कर सकते हैं, जिन्होंने आधुनिक गणित को आकार दिया है और हमारे विश्व की समझ को निरंतर प्रभावित कर रहे हैं।

Scanned by AnyScanner

विद्या भारती उच्च शिक्षा संस्थान

विद्या भारती उच्च शिक्षा संस्थान (VBUSS) भारतीय परंपराओं में निहित एक समग्र, मूल्य-आधारित ढांचे के अंतर्गत शैक्षणिक उत्कृष्टता, चरित्र निर्माण और राष्ट्र-निर्माण पर बल देते हुए गुणवत्तापूर्ण उच्च शिक्षा प्रदान करने के लिए प्रतिबद्ध है। **"सा विद्या या विमुक्तये"** - अर्थात् "वह ज्ञान जो मुक्त करता है" - इस प्रेरणादायक ध्येय वाक्य से संचालित होकर, VBUSS ऐसी पीढ़ी के निर्माण का संकल्प करता है जो न केवल शैक्षणिक दृष्टि से दक्ष हो, अपितु सामाजिक रूप से उत्तरदायी एवं आध्यात्मिक रूप से जागरूक भी हो।

संस्थान उच्च शिक्षा के मूल तत्वों के रूप में समालोचनात्मक चिन्तन, वैज्ञानिक दृष्टिकोण, नैतिक जीवन और गहन सांस्कृतिक समझ को प्रमुखता प्रदान करता है। सम्पूर्ण भारतवर्ष में विस्तृत शैक्षणिक तंत्र के माध्यम से VBUSS ने उल्लेखनीय प्रभाव डाला है। यह संस्था अनेक शिक्षक प्रशिक्षण महाविद्यालयों, डिग्री संस्थानों तथा व्यावसायिक केन्द्रों का संचालन कर, देश में उच्च शिक्षा की गुणवत्ता तथा उपलब्धता को सुदृढ़ करने का कार्य कर रही है।

उपलब्धियों की दृष्टि से भी VBUSS ने उच्च शिक्षा के क्षेत्र में प्रशंसनीय प्रगति की है। संस्थान ने सम्पूर्ण भारत में महाविद्यालयों और विश्वविद्यालयों का एक सुदृढ़ तंत्र स्थापित किया है, जो विज्ञान, प्रौद्योगिकी, कला एवं सामाजिक विज्ञान जैसे विविध क्षेत्रों में शैक्षणिक मार्गदर्शन प्रदान करता है। कठोर पाठ्यक्रमों और अनुसंधान पहलों के माध्यम से निरंतर शैक्षणिक उत्कृष्टता को सुनिश्चित करते हुए, इसने शिक्षा क्षेत्र में विशिष्ट योगदान हेतु मान्यता प्राप्त की है।

विद्या भारती ने वंचित समुदायों को शिक्षा उपलब्ध कराकर सामाजिक समावेशन को बढ़ावा देने में भी सक्रिय भूमिका निभाई है, जिससे गुणवत्तापूर्ण शिक्षा की पहुँच का अंतर कम हुआ है।

Scanned by AnyScanner

अपने सतत प्रयासों द्वारा VBUSS भारत के भविष्य को कुशल, ज्ञानसम्पन्न एवं नैतिक नेतृत्व प्रदान कर रहा है। आधुनिक शैक्षणिक विषयों का प्राचीन भारतीय ज्ञान से समन्वय कर, VBUSS राष्ट्र के प्रति समर्पित, जिम्मेदार और जागरूक नागरिकों के निर्माण में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभा रहा है।

VBUSS प्राचीन भारतीय ज्ञान को पुनः जागृत कर समकालीन शिक्षा प्रणाली में एकीकृत करने के राष्ट्रीय आंदोलन में अग्रदूत के रूप में प्रतिष्ठित है। प्रस्तुत पुस्तक इस महान अभियान में एक विनम्र योगदान है। यह भारतीय ज्ञान परंपरा के प्रमुख विचारों, दार्शनिक अवधारणाओं एवं विभिन्न शास्त्रों को एक सुलभ एवं विचारोत्तेजक स्वरूप में संकलित करता है।

Scanned by AnyScanner

संख्या और मान : भारतीय विमर्श

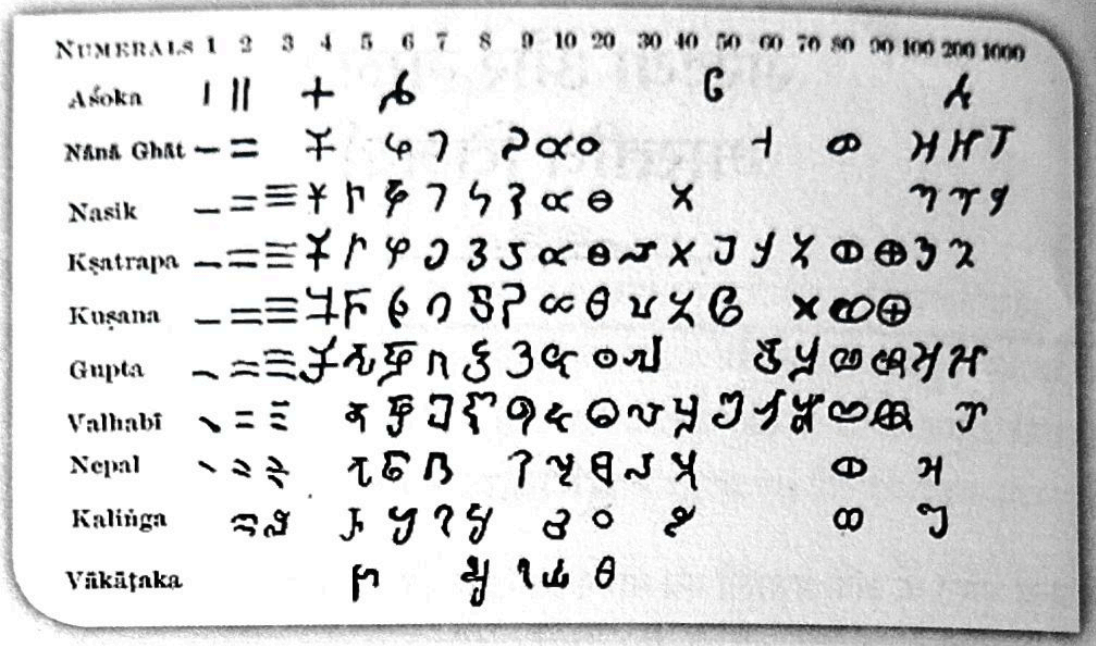
भूमिका

यह ग्रन्थ भारत के अंक प्रणाली एवं मापन इकाइयों की विलक्षण यात्रा को प्रस्तुत करता है-प्राचीन वैदिक कालीन अभिलेखों और शिलालेखों से लेकर विशेष प्रणालियाँ जैसे भूतसंख्या और कटपयादि तक। आप जानेंगे कि कैसे भारत के प्राचीन विद्वानों ने दशमलव स्थानमूल्य प्रणाली विकसित की, "शून्य" की उत्पत्ति की, और अथाह बड़े संख्याओं का प्रतिनिधित्व किया-जिनका सबूत यजुर्वेद, वेदांग ज्योतिष, एवं लगभग 600 ईस्वी पूर्व की शिलालेखों में मिलता है । इन मौलिक विचारों को पिङ्गलाचार्य (छन्दशास्त्र व द्विआधारी संकेतों के श्रेष्ठ प्रवर्तक), आर्यभट्ट, ब्रह्मगुप्त आदि ने आगे बढ़ाया-बौद्धिक सटीकता को सांस्कृतिक गहराई से जोड़ा। इन्होंने केवल प्राचीन भारत में ही नहीं, बल्कि एशिया, अरब और अंततः यूरोप में व्यापार, खगोल और विज्ञान के क्षेत्र में क्रांतिकारी बदलाव किए। यह पुस्तक आपको इन प्रणालियों से परिचित कराती है-यह एक सहज, मानवतावादी भाषा में प्रस्तुति है-ताकि आप भारत की गणितीय दृष्टि की जीवंत विरासत से जुड़ सकें।

1. संख्यात्मक प्रणाली

वैज्ञानिक और तकनीकी प्रगति संख्यात्मक प्रणाली से बहुत लाभान्वित हुई है, जो भारत का दुनिया को दिया गया एक महत्वपूर्ण योगदान है। यह प्रणाली भारत में सामान्य युग (CE) से पहले विकसित की गई थी, जिसे 8वीं शताब्दी में अरबी विद्वानों ने अपनाया और अंततः 11वीं शताब्दी में पश्चिमी देशों में पेश किया गया।

Scanned by AnyScanner



अशोक काल से ब्राह्मी अंकों का विकास

Source: The Hindu-Arabic numerals (published 1911), Author-Smith, David Eugene, 1860-1944)

संख्याएँ मानव सभ्यता की आधारशिला हैं। उनकी अभिव्यक्ति के लिए विकसित अंक-लिपियाँ न केवल गणितीय प्रगति का प्रतीक हैं, बल्कि सांस्कृतिक और बौद्धिक विकास की कहानी भी कहती हैं। इस पुस्तक में हम भारतीय उपमहाद्वीप में अंक-लिपियों के विकास की यात्रा का विस्तृत अध्ययन करेंगे, जिसमें ब्राह्मी अंकों से लेकर आधुनिक हिंदू-अरबी अंकों तक की क्रमिक प्रगति शामिल है।

• ब्राह्मी अंक-लिपि: प्रारंभिक स्वरूप

ब्राह्मी अंक-लिपि भारतीय उपमहाद्वीप की सबसे प्राचीन ज्ञात संख्यात्मक प्रणाली है जिसका उपयोग मौर्य काल (ईसा पूर्व 3वीं शताब्दी) में हुआ था। यह प्रणाली दशमलव आधारित थी, लेकिन इसमें "शून्य" और स्थानिक मान (place value) की अवधारणा नहीं थी। ब्राह्मी अंकों के कुछ उदाहरण–

संख्या	ब्राह्मी अंक	संख्या	ब्राह्मी अंक
1	·	6	५
2	ᛁ	7	६
3	ᛂ	8	७
4	ᛃ	9	८
5	ᛋ	10	९

Scanned by AnyScanner

इन अंकों का उपयोग विभिन्न शिलालेखों और मुद्राओं में पाया गया है, जैसे शोक के शिलालेखों में।

ून्य की अवधारणा

भास्कर प्रथम का योगदान

ास्कर प्रथम (600–680 ई.) ने 7वीं शताब्दी में "Āryabhaṭīyabhāṣya" नामक ग्रंथ अंकों की स्थानिक मान प्रणाली का उपयोग किया। उन्होंने अंकों को उनके स्थान के नुसार मान देने की विधि अपनाई, जो आधुनिक दशमलव प्रणाली का आधार है। ास्कर प्रथम ने शून्य को एक वृत्त के रूप में दर्शाया, जो आधुनिक शून्य के प्रतीक का ारंभिक रूप माना जाता है।

ब्रह्मगुप्त और शून्य

ह्मगुप्त (598–668 ई.) ने "ब्रह्मस्फुटसिद्धांत" (628 ई.) में शून्य को एक संख्या के रूप परिभाषित किया और इसके साथ गणनाओं के नियम स्थापित किए। उन्होंने शून्य को क बिंदु (·) या छोटे वृत्त के रूप में दर्शाया।

हिंदू-अरबी अंक प्रणाली का विकास और वैश्विक प्रसार

- **अरब जगत में प्रवेश :** 8वीं शताब्दी में भारतीय गणितीय ग्रंथों का अनुवाद बगदाद के "हाउस ऑफ़ विज़डम" में हुआ। अल-ख्वारिज़्मी (c. 850–780 ई.) ने "किताब अल-हिसाब अल-हिंदी" में भारतीय अंकों और गणितीय विधियों को प्रस्तुत किया। उनके नाम से ही "एल्गोरिदम" शब्द उत्पन्न हुआ।
- **यूरोप में प्रवेश:** 13वीं शताब्दी में फिबोनाच्ची (1250–1170 ई.) ने "लिबर अबाकी" के माध्यम से हिंदू-अरबी अंकों को यूरोप में लोकप्रिय बनाया। इस प्रणाली की सरलता और प्रभावशीलता ने इसे वैश्विक स्तर पर स्वीकार्य बना दिया।

आधुनिक हिंदू-अरबी अंक प्रणाली

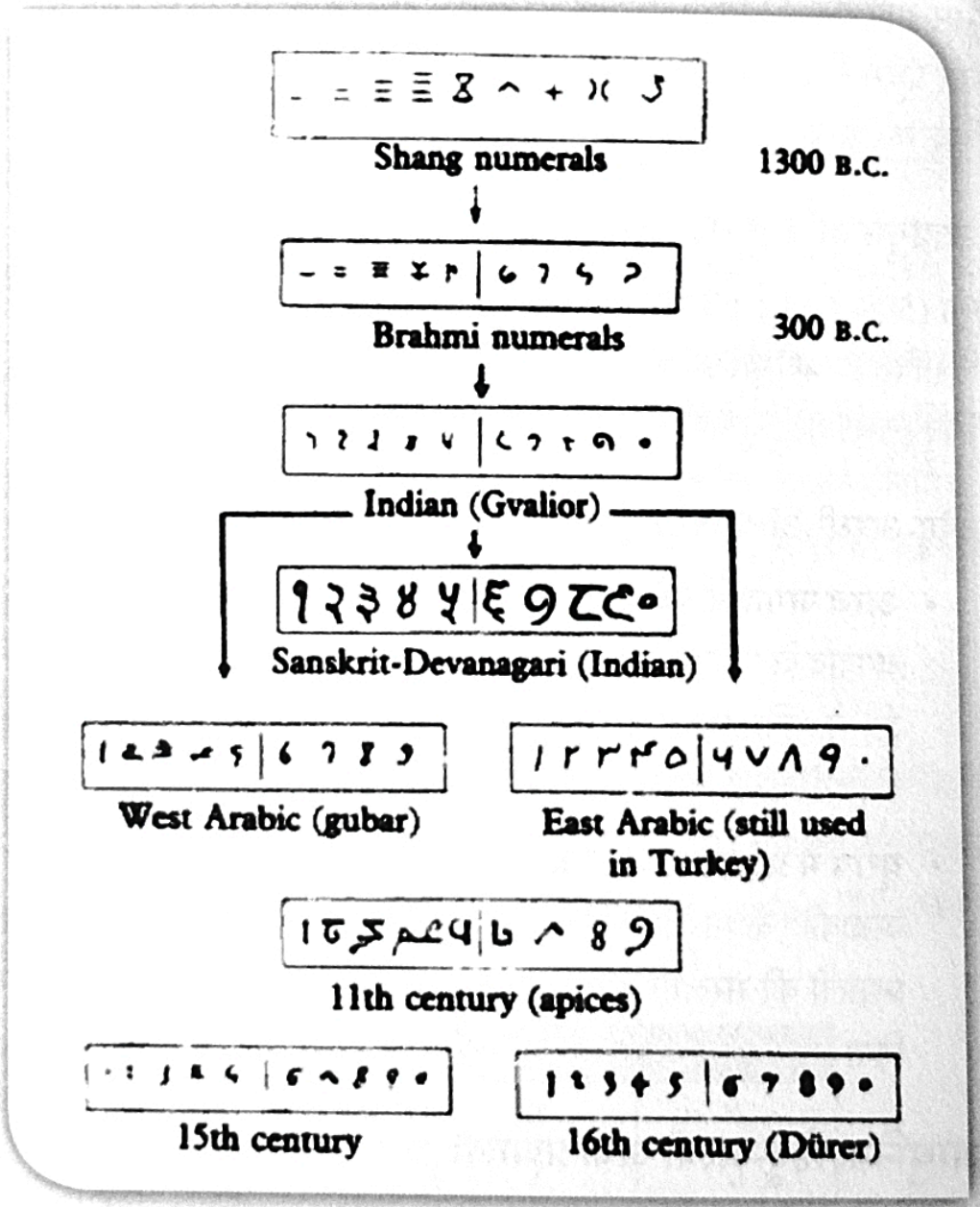
ाज उपयोग में आने वाली "हिंदू-अरबी अंक प्रणाली" (0 से 9 तक) भारतीय ब्राह्मी कों से विकसित हुई है। इस प्रणाली की प्रमुख विशेषताएँ हैं:

- **स्थानिक मान प्रणाली:** अंकों का मान उनके स्थान पर निर्भर करता है।

Scanned by AnyScanner

- **शून्य का उपयोग:** गणनाओं को सरल और सटीक बनाता है।
- **दशमलव प्रणाली:** गणितीय और वैज्ञानिक गणनाओं के लिए आधार।

यह प्रणाली आज संपूर्ण विश्व में मानक बन चुकी है और गणित, विज्ञान, वाणिज्य और प्रौद्योगिकी के क्षेत्रों में इसकी केंद्रीय भूमिका है। अंक-लिपियों का यह विकास न केवल गणितीय दृष्टिकोण से महत्वपूर्ण है, बल्कि यह भारतीय सभ्यता की बौद्धिक उपलब्धियों का प्रतीक भी है। शून्य की अवधारणा और स्थानिक मान प्रणाली जैसे नवाचारों ने वैश्विक गणितीय सोच को नया आयाम दिया।



हिंदू-अरबी अंकों के क्रमिक विकास को दर्शाने वाला चित्र

Source: Karl Menninger (1934) Zahlwort und Ziffer, p. 233, later translated into English (1969) as Number Words and Number Symbols, p. 418. Modified by Frank Swetz (1984) in "The Evolution of Mathematics in Ancient China", in Campbell & Higgins, eds., Mathematics: People, Problems, Results, p. 31)

Scanned by AnyScanner

1.1 भारत में संख्यात्मक प्रणाली का ऐतिहासिक प्रमाण

इफ़राह द्वारा किए गए शोध से दोनों अरबी और यूरोपीय स्रोतों से मजबूत प्रमाण मिले हैं, जो यह पुष्टि करते हैं कि आधुनिक संख्यात्मक प्रणाली भारत में उत्पन्न हुई। इफ़राह ने 810 CE से 1814 CE तक के संदर्भों का उपयोग करते हुए भारतीय गणित पर पहले के विद्वानों की टिप्पणियों को उजागर किया। उदाहरण के लिए, लैपलास ने भारतीय अंक प्रणाली की सराहना की, जिसमें "दस प्रतीकों का उपयोग करके हर संभव संख्या को व्यक्त करने की कुशल विधि" का उल्लेख किया, जिनमें से प्रत्येक के पास पूर्णांक और स्थान मूल्य दोनों होते थे। उन्होंने यह भी कहा कि इस प्रणाली की सरलता ने अंकगणित को सबसे उपयोगी आविष्कारों में से एक बना दिया। इसी तरह, अल-बीरूनी ने 1030 CE में भारत पर अपने काम में यह उल्लेख किया कि जबकि अरबी गणनाओं में संख्यात्मक मान के आधार पर अक्षरों का उपयोग करते थे, भारतीयों ने ऐसा नहीं किया। उन्होंने यह भी देखा कि जैसे-जैसे लिखे गए अक्षरों के रूपों में क्षेत्रीय भिन्नताएँ होती हैं, वैसे ही भारतीयों द्वारा उपयोग किए गए संख्यात्मक प्रतीक भी क्षेत्रीय रूप से भिन्न होते थे।

1.2 संख्यात्मक प्रणाली के प्रमाण

प्राचीन भारतीय सभ्यता में खगोलशास्त्र और गणित के क्षेत्र में भारत का गहरा योगदान स्पष्ट रूप से प्रमाणित होता है। इसका प्रमाण निम्न प्रकार से मिलता है:

- कालीबंगन (राजस्थान) में की गई खुदाई में सड़कों की चौड़ाई1.8- मीटर, 3.6 मीटर, 5.4 मीटर और 7.2 मीटर-पाई गई, जो क्रमशः 3 ,2 ,1 और 4 धनुष की मानक माप के अनुसार थी।
- इसी प्रकार, हड़प्पा, मोहनजो-दरो, ढोलवीरा तथा लोथल जैसे स्थलों पर की गई खुदाई में यह पाया गया कि निर्माण कार्य में आग में पकी हुई ईंटों का उपयोग किया गया था, जिनका अनुपात विशिष्ट रूप से लंबाई : चौड़ाई : ऊँचाई = 1 : 2 : 4 था।

इस प्रकार, ये ऐतिहासिक तथ्य दर्शाते हैं कि प्राचीन भारत में खगोलशास्त्र और गणित की गहरी समझ थी, जिसका प्रयोग नगर नियोजन और वास्तुकला में किया गया था।

1.3 भारतीय संख्यात्मक प्रणाली के प्रमुख लक्षण

भारतीय संख्यात्मक प्रणाली की उत्पत्ति वेदकाल में हुई, जहां संस्कृत में संख्याओं के लिए विशिष्ट नाम थे

Scanned by AnyScanner

- पहले नौ अंकों के नाम थे: एकम, द्वे, त्रिणि, चत्वारि, पञ्च, षट्, सप्त, नव।
- 10 से 100 तक के अंकों के नाम थे: दश, विंशति, त्रिंशत्, चत्वारि पञ्चाशत्, षष्टि, सप्तति, अष्टि, नवति, शत।

2. शून्य का सिद्धांत और महत्व

शून्य का सिद्धांत लगभग 500-300 BCE के आस-पास उत्पन्न हुआ और 600 तक भारत में पूरी तरह से विकसित हुआ। संस्कृत शब्द "जीरो" (Zero) को दर्शाता और इसे केवल एक स्थानधारी के रूप में नहीं, बल्कि एक पूर्णांक के रूप में गणना इस्तेमाल किया गया, जिसका गणित पर गहरा प्रभाव पड़ा। शून्य ने जटिल गणनाओं जै कैलकुलस को संभव बनाया और यह आधुनिक कंप्यूटरों में उपयोग किए गए द्विआधा अंकगणित के विकास में महत्वपूर्ण था।

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10^0	—	=	≡	𑁧	𑁨	𑁩	𑁪	𑁫	𑁬
10^1	𑁭	𑁮	𑁯	𑁰	𑁱	𑁲	𑁳	𑁴	⊕
10^2	𑁵	𑁶	𑁷	𑁸	𑁹				
10^3	𑁺	𑁻	𑁼	𑁽	𑁾				

ब्राह्मी अंकों के चिह्न – दूसरी शताब्दी ईस्वी

Source: Stephen Chrisomalis (Q59611138), Numerical notation: A Comparative History, Cambridge [et al.]: Cambridge University Press, 2010, ISBN 978-0-521-87818-0, p. 189, and Richard Salomon Indian Epigraphy, New York/Oxford: Oxford University Press, 1998, ISBN 0-19-509984-2, p. 58.

प्राचीन भारतीय ऋषियों ने शून्य के विचार के विकास में महत्वपूर्ण योगदान दिया जिससे इसे केवल एक स्थानापन्न से लेकर एक ऐसा संख्या बना दिया गया, जिसकी अपनी विशिष्ट विशेषताएँ हैं। नीचे हम इस बारे में गहरे से विचार करेंगे कि कैसे शून्य का विचार भारत में उभरा, इसके दार्शनिक आधार और गणित और विज्ञान पर इसके दीर्घकालिक प्रभाव के बारे में।

Scanned by AnyScanner

ाचीन भारतीय विचार में शून्य

में **शून्य** शब्द का अर्थ मूल रूप से "रिक्तता" या "मात्रा की अनुपस्थिति" था, समय के साथ इसका अर्थ शून्य एक संख्या के रूप में विकसित हुआ। शून्य का पहला उल्लेख **पिंगला**, प्राचीन भारतीय विद्वान द्वारा, उनके कार्य छंदशास्त्र (2nd ई.पू.) में मिलता है। पिंगला ने **शून्य** शब्द का उपयोग संस्कृत काव्य में "लय" की स्थिति को व्यक्त करने के लिए किया था, जहाँ प्रत्येक वर्ण "लघु" या "दीर्घ" हो ा था। जब कोई वर्ण नहीं था, तो पिंगला ने उसे शून्य कहा, जो गणित में शून्य के की शुरुआत को चिह्नित करता है।

"शून्यं तु निस्तरङ्गं हृदयाद्विजिनः प्रवृत्तम्।"

ब्रह्मगुप्त के कार्य में शून्य

का सिद्धांत पूरी तरह से **628 ई. में** गणितज्ञ **ब्रह्मगुप्त** द्वारा उनके प्रसिद्ध ग्रंथ **फुटसिद्धांत** में औपचारिक रूप से परिभाषित किया गया। ब्रह्मगुप्त पहले व्यक्ति थे िने शून्य को एक संख्या और प्रतीक के रूप में परिभाषित किया। उन्होंने इसे *"किसी ा को स्वयं से घटाने के परिणामस्वरूप उत्पन्न होने वाली संख्या"* के रूप में वर्णित और इसके अंकगणितीय उपयोग के लिए नियम प्रदान किए।

"रुणं रुणसंख्याया, कंचित् स्वाधिकया स्वात् समानाय च शून्यं।"

प्त के कार्य में शून्य के लिए निम्नलिखित नियम स्थापित किए गए–

- शून्य में किसी संख्या को जोड़ने पर वही संख्या प्राप्त होती है (अर्थात् $0 + a = a$)।
- शून्य में किसी संख्या को घटाने पर उस संख्या का नकारात्मक रूप प्राप्त होता है (अर्थात् $0 - a = -a$)।
- किसी संख्या से शून्य को घटाने पर वही संख्या प्राप्त होती है (अर्थात् $a - 0 = a$)।
- शून्य को किसी संख्या से गुणा करने पर शून्य प्राप्त होता है (अर्थात् $0 \times a = 0$)।
- शून्य से भाग देने को अपरिभाषित माना गया, जिससे इसके विरोधाभासी स्वभाव की पहचान की गई (अर्थात् $a \div 0 =$ अपरिभाषित)।

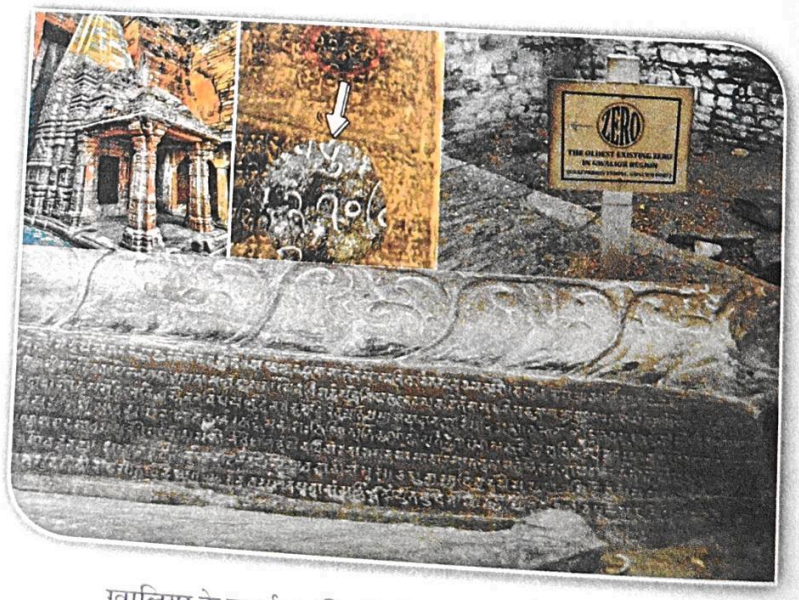
Scanned by AnyScanner

ब्रह्मगुप्त के ये नियम महत्वपूर्ण थे, क्योंकि इनसे शून्य को एक वास्तविक गणितीय संख्या के रूप में स्थापित किया और आधुनिक अंकगणितीय संचालन के लिए आधार प्रदान किया।

• शून्य और दशमलव प्रणाली

शून्य का पूरी तरह से महत्व तब सामने आया जब इसे **दशमलव प्रणाली** के साथ जोड़ा गया। स्थान मान प्रणाली में, एक अंक का मूल्य उसके स्थान पर निर्भर करता है, और शून्य इस प्रणाली में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है, उदाहरण के लिए, 205 और 25 में अंतर स्पष्ट करने के लिए। इस प्रणाली ने बड़ी संख्याओं और गणनाओं का प्रतिनिधित्व करना संभव किया और गणितीय और खगोलशास्त्रीय विश्लेषण के लिए एक शक्तिशाली उपकरण प्रदान किया। यह प्रणाली बाद में **आर्यभट्ट** जैसे गणितज्ञों के कार्य में महत्वपूर्ण भूमिका निभाई, जिन्होंने इसका उपयोग अपने खगोलशास्त्रीय गणनाओं में किया। भारतीय दशमलव प्रणाली को बाद में इस्लामिक दुनिया में और फिर यूरोप में ग्रहण किया गया, जिसने आधुनिक संख्या प्रणाली का आधार तैयार किया।

दशमलव प्रणाली में शून्य के पहले ज्ञात उपयोग का उदाहरण **ग्वालियर शिलालेख** (लगभग 876 ई.) में मिलता है, जहां शून्य प्रतीक (एक छोटा बिंदु) स्पष्ट रूप से एक संख्या में दिखाई देता है। यह शून्य के स्थान मान के रूप में पहली निश्चित उपस्थिति को दर्शाता है।



ग्वालियर के चतुर्भुज मंदिर में दुनिया का सबसे प्राचीन शून्य

• बीजगणित और भास्कर द्वितीय के योगदान

एक और महत्वपूर्ण भारतीय गणितज्ञ **भास्कर द्वितीय** (12वीं सदी ई.) ने अपने कार्य *बीजगणित* (अल्जेब्रा का ग्रंथ) में शून्य और बीजगणितीय समीकरणों के सिद्धांत पर गहरा विचार किया। भास्कर द्वितीय ने शून्य के उपयोग का विश्लेषण करते हुए इसे **अपरिभाषित समीकरणों** (जिनमें कोई समाधान नहीं होता या कई समाधान होते हैं) और भिन्नों में उपयोग किया।

उनके कार्य में शून्य के बारे में कई महत्वपूर्ण सिद्धांत प्रस्तुत किए गए, जैसे:

- शून्य को **जोड़ात्मक पहचान** के रूप में परिभाषित करना (अर्थात् $a + 0 = a$)।
- शून्य को **गुणात्मक पहचान** के रूप में परिभाषित करना (अर्थात् $0 \times a = 0$)।
- नकारात्मक संख्याओं के साथ गणना, जो अक्सर बीजगणितीय अभिव्यक्तियों में शून्य से जुड़े होते थे।

भास्कर द्वितीय का एक प्रसिद्ध योगदान **त्रिकोणमिति और अवकलन** में शून्य के उपयोग था, विशेषकर सीमाओं और अपरिमेय संख्याओं में।

• शून्य के दार्शनिक और आध्यात्मिक आयाम

शून्य का सिद्धांत न केवल गणित पर, बल्कि **भारतीय दर्शन** पर भी गहरा प्रभाव डालता है। हिंदू धर्म में शून्य को **अखिल ब्रह्म** के रूप में देखा गया, जो वह खाली स्थान है, जिससे सृष्टि उत्पन्न होती है। **उपनिषदों** में यह विचार किया गया है कि वास्तविकता का मूल शून्य है, और शून्य अस्तित्व की एकता को दर्शाता है। इसी तरह, **बौद्ध धर्म** में **शून्यता** (रिक्तता या अभाव) का सिद्धांत इस बात को व्यक्त करता है कि सभी घटनाएँ स्वाभाविक अस्तित्व से रहित हैं और सभी चीजें आपस में परनिर्भर हैं। इस दार्शनिक संदर्भ में, शून्य **स्वाभाविक अस्तित्व की अनुपस्थिति** और वास्तविकता की अस्थिर प्रकृति को व्यक्त करता है।

• शून्य और आधुनिक युग

भारतीय गणितज्ञों द्वारा, विशेष रूप से ब्रह्मगुप्त और भास्कर द्वितीय द्वारा किए गए योगदानों ने आधुनिक गणित के विकास के लिए आधार तैयार किया। आज के गणित

Scanned by AnyScanner

और विज्ञान में शून्य विभिन्न क्षेत्रों में अत्यंत महत्वपूर्ण है, जैसे **अल्जेब्रा**, **कैलकुलस**, और **संगणना** में।

आज के **कंप्यूटर विज्ञान** में, उदाहरण के लिए, बाइनरी संख्यात्मक प्रणाली, जो आधुनिक डिजिटल प्रौद्योगिकी की नींव है, पूरी तरह से शून्य और एक के सिद्धांत पर आधारित है। हर गणना, हर एल्गोरिदम, और कंप्यूटरों में डेटा के भंडारण को प्राचीन भारतीय शून्य के समझने से जोड़ा जा सकता है।

- **शून्य के लिए श्लोक और ग्रंथों में संदर्भ**

शून्य का विकास भारतीय ग्रंथों में गहरे रूप से निहित है, जो आध्यात्मिक और दार्शनिक शिक्षा का हिस्सा है। उदाहरण के लिए:

- **भगवद गीता** में भगवान श्री कृष्ण आत्मा के शाश्वत स्वरूप के बारे में कहते हैं, "आत्मा न जन्मती है, न मरती है" (भगवद् गीता 2.20)। इस निराकारता का विचार शून्य के सिद्धांत से दार्शनिक रूप से जुड़ा हुआ है।
- **पिंगला के छंदशास्त्र** में शून्य का संदर्भ एक लय की अनुपस्थिति के रूप में है, जो गणित में बाद में परिभाषित शून्य के अनुपस्थिति के विचार की नींव डालता है।
- **ब्रह्मस्फुटसिद्धांत (ब्रह्मगुप्त, 628 ई.)**

  "शून्यं प्रतिशून्यं च संज्ञायाम्।"

  ब्रह्मगुप्त ने शून्य को एक संख्या के रूप में परिभाषित किया और इसके अंकगणितीय संचालन के नियम प्रदान किए।

शून्य न केवल एक गणितीय उपकरण है, बल्कि यह एक गहरा दार्शनिक प्रतीक भी है, जो अनुपस्थिति और सृष्टि की संभावनाओं दोनों को दर्शाता है, एक द्वैतता जो ज्ञान के कई क्षेत्रों में विचार को प्रेरित करती है।

2.1 बड़े अंकों का प्रतिनिधित्व

प्राचीन भारतीय गणितज्ञों ने बड़े अंकों को सही तरीके से संभालने में विशेषज्ञता प्राप्त की थी, जैसा कि छांदोग्य उपनिषद में अनंत अंकों के विचार का उल्लेख है। ऋग्वेद में बड़े अंकों के लिए नाम हैं, जिनमें से कई दस के गुणांक नहीं हैं। तैत्तिरीय संहिता और बृहदारण्यक उपनिषद में 10^{13} जैसे अंकों का उल्लेख है, और अन्य ग्रंथों में 10^{14} तक के

Scanned by AnyScanner

का उल्लेख है।

संस्कृत में बड़े संख्याओं के नामकरण का तरीका प्रणालीबद्ध था और तीन मुख्य तों का पालन करता था:

1. 0 से 9 तक की संख्याओं के लिए **विशिष्ट नाम** दिए गए थे (जैसे, शून्य, एकं, द्वे, आदि)।
2. 11 से 99 तक की संख्याओं के लिए **योगात्मक सिद्धांतों** का उपयोग किया गया था। उदाहरण स्वरूप, 12 को द्वे-दश (2 + 10) और 84 को चतस्र्-अशिटि (4 + 80) कहा गया। एक घटक सिद्धांत (वियोगात्मक) भी लागू किया गया था, जैसे 29 को एकोऽन-त्रिंशत (30 - 1) कहा गया।
3. 10 की उच्च शक्तियों के लिए **गुणात्मक सिद्धांतों** का उपयोग किया गया। उदाहरण के लिए, 7000 को **सप्त-सहस्रम** (7 × 1000) और 80,000 को **अष्ट-अयुत** (8 × 10,000) कहा गया।

संक्षेप में, शून्य और स्थानीय मान संकेतन के उन्नत प्रयोग के साथ भारतीय यात्मक प्रणाली ने आधुनिक गणित और गणना को दिशा दी। बड़े संख्याओं के करण और प्रबंधन के लिए प्रणालीबद्ध दृष्टिकोण ने प्राचीन भारतीय गणित की ष्टता को और भी स्पष्ट किया, जो आज भी वैज्ञानिक प्रगति को प्रभावित कर रहा है।

प्राचीन भारतीय गणित में संख्याओं का स्थानीय मान

याओं में स्थानीय मान का सिद्धांत, जो आधुनिक अंकगणित का एक मौलिक तत्व है, ीन भारत में पूरी तरह से विकसित हुआ था। अग्नि पुराण इस सिद्धांत को इस प्रकार ट करता है: "...एकाई स्थान से लेकर अगले स्थान तक, प्रत्येक स्थान का मान पिछले ान के दशगुण होता है..." यह स्थानीय मान प्रणाली को स्पष्ट रूप से दर्शाता है, जहाँ कों का मूल्य उनके स्थान के आधार पर बदलता है।

इसी प्रकार, वायु पुराण में इस प्रणाली का एक और संदर्भ है: "...संख्या के पेक स्थान का मान दस के गुणज के समान होता है।..." यह न केवल स्थानीय मान ाली की दशमलव प्रकृति को रेखांकित करता है, बल्कि अत्यधिक बड़ी संख्याओं कल्पना करने की ओर भी संकेत करता है, जिससे यह प्रणाली कम से कम 18 स्थानों विस्तारित होती है।

Scanned by AnyScanner

श्री शंकराचार्य द्वारा लिखित शारीरक-भाष्य में स्थानीय मान की समझ के लिए एक अद्भुत उदाहरण दिया गया है। वहाँ कहा गया है कि जैसे एक व्यक्ति "देवदत्त" को अलग-अलग सामाजिक-परिवारिक संदर्भों जैसे पिता, पुत्र, साला, भ्राता, पोता, बालक, युवक आदि नामों से पुकारा जाता है, वैसे ही एक अंक का मान भी उसके स्थानानुसार, जैसे इकाई, दस, सौ, हजार आदि–परिवर्तनशील होता है। यह तुलना प्रभावी रूप से स्थान के आधार पर मूल्य में परिवर्तन को दर्शाती है, जैसे किसी नाम के विभिन्न संदर्भों में विभिन्न भूमिकाएँ हो सकती हैं।

पतंजलि के योगसूत्र में भी स्थानीय मान का एक समान व्याख्यान मिलता है, जो प्राचीन भारतीय विचारधारा में इसकी महत्ता को और अधिक उजागर करता है। इसके अतिरिक्त, महावीराचार्य ने लगभग 850 ईस्वी में लिखा गया **गणितसारसंग्रह** में स्थानमूल्य प्रणाली की व्याख्या कई संख्यात्मक उदाहरणों के माध्यम से की है। संख्या 12345654321 वास्तव में 111111 का वर्ग (square) है, और इस संख्या का उदाहरण स्थानमूल्य सिद्धांत को स्पष्ट रूप से समझाने में सहायता करता है। यह दिखाता है कि कैसे संख्याओं के अंकों का मान उनके स्थान के आधार पर बदलता है। यह उदाहरण न केवल स्थानीय मान सिद्धांत को स्पष्ट करता है, बल्कि प्राचीन भारतीय विद्वानों की गणितीय रचनात्मकता को भी दर्शाता है। इन संदर्भों से यह प्रमाणित होता है कि प्राचीन भारत में स्थानीय मान और संख्यात्मक संचालन की समझ कितनी उन्नत थी, जिसने आधुनिक संख्यात्मक प्रणाली की नींव रखी।

4. दशमलव प्रणाली

लीलावती के उद्धाटन श्लोकों में, प्रसिद्ध भारतीय गणितज्ञ भास्कराचार्य (भास्कर I) इस बात को स्वीकार करते हैं कि उनके पूर्वजों ने दस के गुणांक पर आधारित एक स्थानीय मान प्रणाली विकसित की थी, जो मूल रूप से दशमलव प्रणाली है। भारत में दशमलव प्रणाली का प्रारंभिक उपयोग पश्चिमी दुनिया में इसके अपनाने से कई शताब्दियाँ पहले हुआ था। दशमलव संख्या प्रणाली, जो कि बेस-10 संरचना पर आधारित है, पूरी तरह से भारत में परिकल्पित और उपयोग की गई थी, इससे पहले कि यह अन्य संस्कृतियों में फैले।

इस प्रणाली की स्थानीय मान प्रकृति, जहाँ किसी अंक का मूल्य उस अंक के स्थान (एकाइयाँ, दहाई, सैंकड़े, आदि) पर निर्भर करता है, इसे पहले के अंक प्रणालियों से कहीं अधिक कुशल बना देती है। भारत में इस स्थानीय मान प्रणाली का विकास

Scanned by AnyScanner

आधुनिक अंकगणित की नींव रखता है, जिसे हम आज उपयोग करते हैं, और यह प्राचीन भारतीय गणितज्ञों की उन्नत गणितीय सोच को प्रदर्शित करता है।

5. प्राचीन भारतीय गणित में संख्या का प्रतिनिधित्व

प्राचीन भारतीय गणित में संख्याओं को व्यक्त करने के लिए दो प्रमुख प्रणालियाँ थीं–

1. भूत-संख्या प्रणाली
2. कटपयादि प्रणाली

(Source: Datta, B., & Singh, A.N. (1935). History of Hindu Mathematics (Vol. 1 & 2). Calcutta University Press.)

5.1 भूत-संख्या प्रणाली

इस प्रणाली में संख्या को शब्दों के माध्यम से व्यक्त किया जाता था, जो दैनिक जीवन, पौराणिक कथाओं या प्रकृति से जुड़ी वस्तुओं या अवधारणाओं का प्रतिनिधित्व करते थे। उदाहरण के लिए, "चन्द्र" (चाँद) शब्द संख्या एक का प्रतिनिधित्व करता है। क्योंकि एक ही चंद्रमा होता है। यह प्रणाली लचीली थी और सांस्कृतिक और दार्शनिक विचारों से जुड़ी थी। *(Source: Filliozat, J. (2004). The Classical Doctrine of Indian Medicine: Its Origins and Its Greek Parallels. Munshiram Manoharlal Publishers)*।

यहां तक कि गणितीय संचालन में शून्य का उपयोग और संख्याओं का स्थानीय मान प्रणाली के आधार पर गणना करना प्राचीन भारत में अत्यधिक विकसित था, जो आज के आधुनिक अंकगणित का आधार बना।

(Source: Katz, V. J. (2007). A History of Mathematics: An Introduction (3rd ed.). Pearson)।

- **भूत-संख्या प्रणाली में शब्दों के सामान्य स्रोत**

भूत-संख्या प्रणाली कई श्रेणियों के शब्दों से प्रेरित होती है:

1. **संख्यात्मक शब्द:** जैसे - शून्य (0), एकम् (1), द्वे (2), त्रिणि (3), चत्वारि (4), पञ्च (5), षट् (6), सप्त (7), अष्ट (8), नव (9)।

(Source: Hayashi, T. (2003). Indian Mathematics. In Helaine Selin (Ed.), Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures. Springer.)

2. **प्राकृतिक/भौतिक तत्व:** पृथ्वी (1), चन्द्र (1), तारे (अनेक = ∞), अग्नि (1), दिशाएं (4 या 10), सप्तपर्वत (7), आकाश (1) जैसे शब्दों का उपयोग संख्याओं के प्रतीक के रूप में होता था। *(Source: Katz, V. J. (2007))*

Scanned by AnyScanner

3. **पशु:** हाथी (8 – आठ दंत), नाग (5 या 7 फनों के आधार पर), घोड़ा (4 पैरों वाला) जैसे पशुओं के प्रतीकों को भी संख्याओं के निरूपण में प्रयोग किया गया है। *(Source: Pingree, D. (2003). The Logic of Non-Western Science: Mathematical Traditions of South Asia. ISHM.)*

4. **शरीर के अंग:** नेत्र (2), कर (2), नासिका (2), सप्त धातुएँ (7) जैसे शारीरिक अंग भी भूत-संख्या में प्रयुक्त होते थे। *(Source: Joseph, G. G. (2011). The Crest of the Peacock: Non-European Roots of Mathematics (3rd ed.). Princeton University Press.)*

5. **देवता:** ब्रह्मा (1), त्रिमूर्ति – ब्रह्मा, विष्णु, महेश (3), पञ्चदेव – गणेश, विष्णु, शिव, दुर्गा, सूर्य (5), द्वादश आदित्य (12) इत्यादि देवताओं का उपयोग संख्यात्मक अर्थ देने हेतु होता था। *(Source: Hayashi, T. (2003))*

6. **प्राकृतिक एवं कालिक अवधारणाएं:** ऋतुएं (6), महीने (12), सप्ताह के दिन (7), पंचमहाभूत – पृथ्वी, जल, अग्नि, वायु, आकाश (5) जैसे कालिक और प्राकृतिक घटकों का प्रयोग भी इस प्रणाली में होता था।

(Source: Datta, B., & Singh, A. N. (1935).

- **लचीलापन और सौंदर्यात्मक एकीकरण**

भूत-संख्या प्रणाली खुले तरीके से प्रतिनिधित्व के कई रूपों की पेशकश करती है। यह कठोर नियमों द्वारा नियंत्रित नहीं होती, बल्कि उपयोगकर्ता की रचनात्मकता और ज्ञान द्वारा आकारित होती है। इससे गणितज्ञों, कवियों और विद्वानों को संख्यात्मक प्रतिनिधित्व को भाषा की सौंदर्यात्मक सुंदरता के साथ जोड़ने का अवसर मिलता है, जिससे गणित का एक काव्यात्मक और सांस्कृतिक दृष्टिकोण सामने आता है। यह प्रणाली इस बात का उदाहरण है कि कैसे प्राचीन भारतीय गणित केवल एक तकनीकी क्षेत्र नहीं था, बल्कि एक कला रूप भी था, जहां गणित, साहित्य और दर्शन के बीच सीमाएं लचीली थीं, जिससे संख्याएं न केवल गणना के उपकरण बल्कि अर्थ, सुंदरता और संस्कृति के वाहक बन गईं।

Scanned by AnyScanner

णितज्ञों जैसे वररुचि (Vararuchi) और बाद में केरल स्कूल के ज्योतिषियों द्वारा हुआ पाया जाता है। संख्याओं को शब्दों में एन्कोड करने का एक चतुर तरीका करती है। भूत-संख्या प्रणाली के विपरीत, जो सामान्य तत्वों और रूपकों का ग करती है, कटपयादि प्रणाली प्रत्येक संस्कृत वर्णमाला के व्यंजन को एक विशिष्ट प्रदान करती है ताकि वेद, खगोलशास्त्र और काव्य में संख्यायें याद की जा सकें मस्वरूप यह प्रणाली भाषा की संरचना और संख्यात्मक प्रतिनिधित्व का संयोजन है।

कटपयादि प्रणाली कैसे काम करती है

णाली में प्रत्येक व्यंजन को 0 से 9 तक एक संख्या दी जाती है। स्वर का सीधे त्मक मान नहीं होता और वे आमतौर पर स्थान धारकों के रूप में या संख्याओं को करने के लिए उपयोग किए जाते हैं। व्यंजनों को जोड़कर, कोई शब्द बना सकता इन शब्दों को अक्षर दर अक्षर डिकोड करके संबंधित संख्या को प्रकट किया जा है।

कटपयादि प्रणाली के कुछ प्रमुख नियम निम्नलिखित हैं:

1. **स्वर शून्य को सूचित करते हैं**: इस प्रणाली में, जो स्वर अकेले खड़ा होता है, वह संख्या शून्य को सूचित करता है। यह नियम संख्याओं और गैर-संख्यात्मक शब्दों में अंतर करने में मदद करता है और डिकोडिंग प्रक्रिया में स्पष्टता बनाए रखता है।
2. **व्यंजन संख्याओं का प्रतिनिधित्व करते हैं**: प्रत्येक व्यंजन को 0 और 9 के बीच एक विशिष्ट संख्या से जोड़ा जाता है। प्रणाली में कुछ लचीलापन होता है, जिसमें प्रत्येक संख्या के लिए कई व्यंजन निर्धारित होते हैं। कुछ सामान्य नियुक्तियाँ इस प्रकार हैं–

कटपयादि संख्यात्मक प्रणाली तालिका

अंक	अक्षर (देवनागरी)
1	क (ka), ट (ṭa), प (pa), य (ya)
2	ख (kha), ठ (ṭha), फ (pha), र (ra)
3	ग (ga), ड (ḍa), ब (ba), ल (la)
4	घ (gha), ढ (ḍha), भ (bha), व (va)

Scanned by AnyScanner

अंक	अक्षर (देवनागरी)
5	ङ (ṅa), ण (ṇa), म (ma), श (śa)
6	च (ca), त (ta),ष (ṣa)
7	छ (cha), थ (tha),स (sa)
8	ज (ja), द (da),ह (ha)
9	झ (jha), ध (dha)
0	ञ (ña), न (na)

महत्वपूर्ण बातें

केवल **व्यंजन** अक्षरों को ही संख्याएँ दी जाती हैं; **स्वर** (अ, आ, इ, ई आदि) का कोई मान नहीं होता - वे केवल उच्चारण के लिए होते हैं।

कई व्यंजन एक ही अंक के अंतर्गत आते हैं।

शब्दों से संख्या निकालने के लिए **अक्षरों को दाईं से बाईं ओर** पढ़ा जाता है।

उदाहरण:

"नग": ग = 3, न = 0 → संख्या = **03**

"कपि": प = 1, क = 1 → संख्या = **11**

1. **अंतिम व्यंजन**: जब व्यंजन एक-दूसरे के साथ उपयोग किए जाते हैं, तो अंतिम व्यंजन (जो स्वर से पहले होता है) संबंधित संख्या को पहचानने के लिए मुख्य अक्षर माना जाता है। यह नियम यह सुनिश्चित करता है कि शब्द का मूल्य उस अंतिम व्यंजन से प्राप्त किया जाए जो स्वर से पहले आता है, जिससे डिकोडिंग प्रक्रिया सरल हो जाती है।
2. **स्वतंत्र व्यंजन**: यदि कोई व्यंजन स्वर के बिना आता है, तो वह संख्यात्मक मूल्य में योगदान नहीं करता है। इसलिए, ऐसे व्यंजन संख्या-डिकोडिंग प्रक्रिया में नजरअंदाज कर दिए जाते हैं।
3. **संख्याओं को पढ़ना**: भूत-संख्या प्रणाली की तरह, कटपयादि प्रणाली में एन्कोड की गई संख्याओं को सामान्य स्थानीय मान क्रम में पढ़ा जाता है, जैसे इकाई, दहाई, सैंकड़ा आदि। उदाहरण के लिए, यदि एक संख्या के शब्द 6 (च) के लिए सैंकड़ों स्थान पर, 5 (म) के लिए दसों स्थान पर, और

Scanned by AnyScanner

8 (द) के लिए इकाइयों के स्थान पर बनाया गया है, तो प्रदर्शित संख्या 658 होगी।

पयोग

ादि प्रणाली का व्यापक उपयोग संस्कृत साहित्य में हुआ था, विशेष रूप से काव्य मृति संदर्भों में। इसने विद्वानों को बड़ी संख्याओं या जटिल गणितीय अवधारणाओं ाहित्यिक कृतियों में एन्कोड करने का अवसर दिया, जिससे उन्हें याद रखना ा हो गया या गुप्त रूप से छिपाना आसान हो गया। उदाहरण के लिए, प्रसिद्ध ग्रंथ ास्त्र" जिसमें संस्कृत काव्य की संरचना पर चर्चा की गई है, कटपयादि प्रणाली का ा करके कुछ बड़ी संख्याओं और गणितीय सूत्रों को व्यक्त करता है।

इस प्रणाली की क्षमता संख्याओं को वर्णों के साथ जोड़ने के कारण, यह उन ो बनाने का आदर्श उपकरण बन गई, जहाँ भाषाई और गणितीय तत्वों दोनों को ा या याद रखना जरूरी था। ऐसे ग्रंथों में, विद्वान जटिल गणितीय या खगोलशास्त्रीय ओं को स्मृति श्लोकों के रूप में एन्कोड कर सकते थे।

टपयादि प्रणाली का उदाहरण

ाली को स्पष्ट करने के लिए, चलिए एक शब्द को कटपयादि नियमों का उपयोग डेकोड करते हैं। मान लीजिए हमारे पास **"राम"** शब्द है:

- व्यंजन र 2 से मेल खाता है।
- स्वर आ एक स्थानधारक को सूचित करता है, इसलिए यह संख्या पर प्रभाव नहीं डालता।
- व्यंजन म 5 से मेल खाता है।
- स्वर आ फिर से एक स्थानधारक है। इस प्रकार, "राम" शब्द द्वारा प्रतिनिधित्व की गई संख्या 52 होगी।

ाभ और लचीलापन

ादि प्रणाली का एक प्रमुख लाभ यह है कि यह बड़ी संख्याओं या यहां तक कि जटिल गणनाओं को एन्कोड करने में लचीलापन प्रदान करती है। इसने भाषा ख्याओं को इस तरह से संयोजित किया जो आसानी से याद किया जा सकता था ा प्राचीन भारत की सांस्कृतिक संदर्भ में गहरे रूप से एकीकृत था। इसके अलावा, ाली केवल गणितीय ग्रंथों तक सीमित नहीं थी, बल्कि साहित्य में भी इसका

Scanned by AnyScanner

उपयोग हुआ, जहाँ यह एक कोड और एक कलात्मक उपकरण दोनों के रूप में कार्य क सकती थी। कटपयादि प्रणाली, भूत-संख्या प्रणाली के साथ मिलकर, प्राचीन भारतीय विद्वानों के उन्नत गणितीय विचार और रचनात्मक बुद्धिमत्ता का उदाहरण प्रस्तुत करत है, यह दर्शाती है कि गणित कैसे भाषा और संस्कृति के साथ सहज रूप से एकीकृत था। ये प्रणालियाँ भारत के गणितीय विचारों और विधियों के विकास में सांस्कृतिक औ बौद्धिक योगदान को उजागर करती हैं, जिनका विश्व पर स्थायी प्रभाव पड़ा है।

6. प्राचीन भारतीय मापन प्रणाली

प्राचीन भारत में समय, दूरी और भार के मापन के लिए एक अत्यंत विकसित औ संगठित प्रणाली विकसित की गई थी। यह प्रणाली न केवल वैज्ञानिक और गणितीय दृष्टि से समृद्ध थी, बल्कि व्यापार, वाणिज्य, आयुर्वेद और दैनंदिन जीवन में भी गहराई से जुड़ी हुई थी। विभिन्न प्राचीन ग्रंथों में इन मापों का उल्लेख मिलता है, जिनसे तत्कालीन भारतीय समाज की गहन वैज्ञानिक दृष्टि का बोध होता है।

1. भौतिक मापन में प्रयुक्त इकाइयाँ

प्रसिद्ध गणितज्ञ भास्कराचार्य (भास्कर I) ने अपने ग्रंथ लीलावती में लंबाई, समय औ द्रव्यमान के मापन की विविध इकाइयों का उल्लेख किया है। इन इकाइयों का प्रयोग व्यापार, वाणिज्य और खगोलशास्त्र सहित अनेक क्षेत्रों में होता था। उदाहरणस्वरूप, लीलावती में छोटी से छोटी इकाई जैसे "त्रसरेणु" (तीन परमाणुओं से बनी एक सूक्ष्म इकाई) का वर्णन मिलता है, जो यह दर्शाता है कि उस समय के मनीषियों ने अणु औ सूक्ष्मतम मापन की अवधारणा विकसित कर ली थी।

2. अर्थशास्त्र में माप और मान

कौटिल्य (चाणक्य) द्वारा रचित अर्थशास्त्र के द्वितीय पुस्तक के अध्याय 19 और 20 में मौर्यकालीन मापन प्रणाली का विशद विवरण मिलता है। इसमें लंबाई, समय और भार की मानकीकृत इकाइयाँ दी गई हैं, जिन्हें व्यापार और कर निर्धारण में प्रयुक्त किया जाता था। उदाहरण के लिए, 'दण्ड' (लगभग 6 फीट) एक लंबाई की इकाई थी, और 'पल' व 'तोला' जैसी इकाइयाँ भार मापन में प्रचलित थीं।

3. आयुर्वेद में माप की भूमिका

प्राचीन आयुर्वेदिक ग्रंथों में औषधियों के निर्माण में सामग्री की मात्रा का अत्यंत सूक्ष्मता

Scanned by CamScanner

न किया गया है। जैसे - चरक संहिता और सुश्रुत संहिता में द्रव और ठोस औषधियों
यन हेतु इकाइयाँ जैसे 'रस', 'प्रस्थ', 'माना', 'कर्ष' (लगभग 12 ग्राम), और 'रत्ति'
ग 0.12 ग्राम) का प्रयोग मिलता है। यहाँ परमाणु की अवधारणा भी महत्वपूर्ण थी,
ो सूक्ष्म मापन संभव होता था और औषधियों की शुद्धता सुनिश्चित की जाती थी।

ज्ञान और दैनिक जीवन में मापन का महत्व

न मापन प्रणालियाँ केवल वैज्ञानिक ज्ञान तक सीमित नहीं थीं, बल्कि इनका प्रयोग
जीवन में भी होता था। समय मापन के लिए घटिका, पल, निमेष आदि इकाइयाँ
ो खगोलीय गणनाओं और पंचांग निर्माण में उपयोग होती थीं। इससे स्पष्ट होता है
ाचीन भारत में व्यावहारिक विज्ञान और सामाजिक जीवन में एक गहरा सामंजस्य

प्राचीन भारतीय शास्त्रों में विज्ञान: मापन की दृष्टि से

समय मापन (Time Measurements)

ान भारत में समय को केवल व्यावहारिक नहीं बल्कि **दार्शनिक और ब्रह्माण्डीय** रूप
ो समझा गया था। समय की गणना पल भर से लेकर अरबों वर्षों तक की जाती थी।

कल्प (Kalpa) - ब्रह्मा का एक दिन

- **कल्प** ब्रह्मा के एक दिन के बराबर होता है, जिसकी अवधि **4.32 अरब वर्ष** (billion years) मानी जाती है।
- **संदर्भ**: *महाभारत*, शांति पर्व 358.56:

"सप्तपदं महात्मनं कालं ब्रह्मा स्वयम्भुवा।"

भावार्थ: यह श्लोक ब्रह्मा के दिन (कल्प) को दर्शाता है, जो सृष्टि और प्रलय के
का आधार है।

(Source:Srinivasan, S. (1979). Mensuration in Ancient India. Delhi: Ajanta Publications.)

मुहूर्त (Muhurta)

- एक दिन का 30वां भाग - लगभग **48 मिनट**।
- इसका उपयोग विशेष पूजा और यज्ञ आदि के लिए **शुभ मुहूर्त** तय करने में होता था।

Scanned by AnyScanner

- **संदर्भ**: ऋग्वेद, 10.191.4:

"मूर्तिः प्रीतिः सुतं व्रजेयुः मुहूर्ते संप्रजापते।"

भावार्थ: यह श्लोक दर्शाता है कि **मुहूर्त** को पवित्र कर्मों के लिए कितना मह दिया गया था।

3. आर्यभट्ट द्वारा खगोलीय समय मापन

- **आर्यभट्ट** ने सौर वर्ष, नाक्षत्र दिवस, और ग्रहों की गति को मापने की गणन कीं।
- **संदर्भ**: *आर्यभटीय*, अध्याय 2, श्लोक 6:

"अर्धमासो दशगुणं तु यत्र सूर्येण समं यमः।"

भावार्थ: आर्यभट्ट यहां सूर्य की गति और समय के बीच के संबंध को दर्शाते यह **खगोलशास्त्र** की उन्नत सोच का प्रमाण है।

प्रमुख समय इकाइयों का क्रम

क्रम	इकाई	व्याख्या
1	त्रुटि (Truti)	सबसे सूक्ष्म समय इकाई — लगभग 1/33750 सेकंड
2	वेधा (Vedha)	100 त्रुटि = 1 वेधा
3	लव (Lava)	3 वेधा = 1 लव
4	निमेष (Nimeṣa)	3 लव = 1 निमेष
5	क्षण (Kṣaṇa)	5 निमेष = 1 क्षण
6	1 कला	= 1/30 मुहूर्त (96 सेकंड)
7	1 नाड़ी	≈ 24 मिनट (अर्थात 60 नाड़ी × 24 मिनट = 1440 मि = 24 घंटे)
8	मुहूर्त	लगभग 48 मिनट = 1 मुहूर्त

संदर्भ: (विष्णु पुराण, सूर्य सिद्धांत, ब्रह्माण्ड पुराण, मनुस्मृति, Kim Plofker – Mathematics in India, Measurement in Ancient India – Balagangadhara

• लंबाई, आयतन और भार मापन

लंबाई मापन (Length Measurements)

1. अंगुल (Angula)

- एक **अंगुल** का अर्थ होता है - एक उंगली की चौड़ाई (लगभग 1.9 से.मी.)

Scanned by AnyScanner

- इसका उपयोग वास्तु, मूर्तिकला और शिल्पकला में किया जाता था।
- संदर्भ: विश्वकर्मा संहिता:

"अङ्गुलं रूपं जपेत्।"

भावार्थ: अंगुल को रूपरेखा निर्धारण के लिए एक मापक के रूप में उपयोग किया गया है।

2. हस्त (Hasta)

- हस्त = कुहनी से मध्यमा (middle finger) तक की दूरी (~ 18 इंच या 45 से.मी.)
- संदर्भ: *वास्तु शास्त्र*:

"हस्तस्य एकं यथार्थं चत्वारि"

भावार्थ: निर्माण कार्यों में अनुपात मापने के लिए हस्त को मुख्य इकाई माना गया।

3. योजन (Yojana)

- एक योजन = लगभग 12.8 से 15 किमी तक (माना जाता है)
- इसका उपयोग लंबी दूरी जैसे नगरों, राज्यों, या खगोलीय दूरी को मापने में किया गया।
- संदर्भ: *हनुमान चालीसा*, चौपाई:

"जुग सहस्त्र योजन पर भानु।
लील्यो ताहि मधुर फल जानू।।"

भावार्थ: हनुमानजी सूर्य को 12000 × 1000 योजन दूर से एक फल समझकर निगलने को दौड़े।

गणना करें: 12000 × 1000 × 12.8 किमी = **15.36 करोड़ किमी**,

जो आज के वैज्ञानिक अनुमान (149.6 मिलियन किमी) से **बहुत नज़दीक** है।

- **भार मापन (Weight Measurements)**

1. रत्ती (Ratti)

- रत्ती का उपयोग रत्नों और औषधियों के मापन में होता था।
- **1 रत्ती ≈ 0.11-0.18 ग्राम**

Scanned by AnyScanner

2. माष (Masha) और पल (Pala)

- 1 माष ≈ 8 रत्ती
- पल, यव, गुंजाबीज आदि भी भर मापन में इस्तेमाल किए जाते थे
- **संदर्भ:** अर्थशास्त्र, 2.16:

"पालं पद्धतिमूलं च।"

भावार्थ: व्यापार और कर निर्धारण में मापन की **मानकीकृत इ** (standard units) प्रयोग की जाती थीं।

- **आयतन मापन (Volume Measurements)**
  - **कूप (Kupa)** ≈ 4.5 लीटर (तरल या अन्न के लिए)
  - **घटि (Ghati)** ≈ 0.9 लीटर (सूखे पदार्थों के लिए)
  - **प्रस्थ (Prasth)** ≈ 4 कुडव

- **वैज्ञानिक दृष्टिकोण से विश्लेषण**

श्लोक/पद	वैज्ञानिक संकेत
कल्प (महाभारत)	अरबों वर्षों की अवधारणा → आधुनिक ब्रह्माण्डीय समय
मुहूर्त (ऋग्वेद)	48 मिनट की सटीक समय इकाई → अनुष्ठानों का गि निर्धारण
आर्यभटीय	पृथ्वी और सूर्य की गति की गणना → खगोलीय सटीकता
हनुमान चालीसा	पृथ्वी-सूर्य दूरी का वर्णन → 15 करोड़ किमी के करीब
अर्थशास्त्र	मानकीकृत वजन माप → आर्थिक संगठन और व्यापार की

प्राचीन भारत की मापन प्रणालियाँ न केवल व्यापार और वास्तु के लि बल्कि उनका गहरा संबंध **खगोलशास्त्र**, **दर्शन**, और **धार्मिक जीवन** से था। प्र *महाभारत*, *ऋग्वेद*, *अर्थशास्त्र*, *हनुमान चालीसा*, और *आर्यभटीय* इन प्रणालि **गंभीर वैज्ञानिक समझ** को दर्शाते हैं।

ये प्रणालियाँ इस बात का प्रमाण हैं कि प्राचीन भारतीय ऋषि और ग **भौतिक और ब्रह्मांडीय दोनों स्तरों पर** जगत की गहराई से गणना कर सकते थे।

Scanned by AnyScanner

8. व्यापार, वाणिज्य और विज्ञान पर प्रभाव

समय, लंबाई और वजन के मापों का मानकीकरण प्राचीन भारतीय समाज के संचालन के लिए महत्वपूर्ण था, विशेष रूप से व्यापार और वाणिज्य में। इस प्रणाली ने एकरूपता सुनिश्चित की, जिससे विशाल दूरी में वाणिज्यिक लेन-देन करना आसान हुआ। इसके अतिरिक्त, समय, दूरी और वजन के सटीक माप ने खगोलशास्त्र, चिकित्सा और धातु विज्ञान जैसे वैज्ञानिक प्रयासों में भी महत्वपूर्ण भूमिका निभाई।

अंत में, प्राचीन भारतीय माप प्रणालियाँ, विशेष रूप से परमाणु के सिद्धांत, प्राचीन विद्वानों के पास उपलब्ध गणितीय और वैज्ञानिक ज्ञान को उजागर करती हैं। ये प्रणालियाँ विभिन्न क्षेत्रों में आवश्यक थीं, जैसे व्यापार, वाणिज्य, आयुर्वेद और खगोलशास्त्र, जो भारत की बौद्धिक धरोहर की गहराई को दर्शाती हैं।

9. पिंगल के छन्द:शास्त्र और उनके गणितीय योगदान

1. छन्दशास्त्र और मात्राओं का वर्गीकरण

पिंगल का छन्द:शास्त्र संस्कृत छन्दशास्त्र पर सबसे प्राचीन ग्रंथ माना जाता है, जिसने काव्य में छंदबद्धता के नियमों का उद्भव किया। इस ग्रंथ में उन्होंने मात्राओं को दो मुख्य प्रकारों में वर्गीकृत किया:

- **लघु (Short Syllable):** कोई भी मात्रास्पद अक्षर जिसमें ह्रस्व स्वर हो, जैसे "क" जिसमें "अ" स्वर लघु होता है, उसे लघु माना गया।
- **गुरु (Long Syllable):** गुरु मात्राएँ निम्न परिस्थितियों में होती हैं:
  - » दीर्घ स्वर के साथ मात्रापद, जैसे "का" (जहां "आ" दीर्घ स्वर है)।
  - » लघु मात्रापद के बाद संयुक्त व्यंजन आने पर, जैसे "क्र", "स्क"।
  - » लघु मात्रापद के बाद अनुस्वार (ं) या विसर्ग (:) आने पर।
  - » छंद के अंतिम पद के हिसाब से कुछ विशिष्ट मामलों में अंतिम मात्रापद गुरु माना जाता है।

लघु और गुरु मात्राएँ ध्वनि की अवधि के आधार पर छन्द के निर्माण में अत्यंत महत्वपूर्ण हैं और ये संस्कृत काव्य के छंदों को परिभाषित करती हैं।

2. पिंगल द्वारा प्रस्तुत गणितीय विचार

(a) छन्दों की सम्भावित मात्राओं का सम्पूर्ण संयोजन (Combinatorics)

पिंगल ने निश्चित संख्या (n) के मात्राओं के संयोजनों की सूची बनाने के लिए नियम

Scanned by AnyScanner

विकसित किए। उन्होंने गणित की उस क्षेत्र-संयोजन गणित (Combinatorics)-में गुणात्मक योगदान दिया, जहां सभी संभव लघु और गुरु मात्राओं के संयोजन (जैसे छंद के लिए सम्भावित ताल) की व्याख्या होती है।

उदाहरण स्वरूप, n = 3 के लिए सभी समभावित संयोजन हैं:

ग-ग-ग, ग-ग-ल, ग-ल-ग, ल-ग-ग, ग-ल-ल, ल-ग-ल, ल-ल-ग, ल-ल-ल।

(b) प्रारंभिक बाइनरी प्रणाली (Binary System) का रूपांतरण

पिंगल के मात्राक्रम संयोजन और उनके विस्तार की प्रक्रिया को आधुनिक भाष में एक प्रारंभिक बाइनरी व्यवस्था के रूप में देखा जाता है, जहां लघु और गुरु मात्राएँ (0 और 1 के समान) संख्याओं के प्रतिनिधित्व में काम आती हैं।

- पिंगल की प्रणाली में स्थानमूल्य दाएं से बाएं बढ़ता है, जो आधुनिक बाइनरी संख्या प्रणाली से विपरीत है।
- उन्होंने 0 और 1 के स्पष्ट अंक अर्थ नहीं दिए, पर उनके उपयोग से बाइनरी संयोजन की समझ स्पष्ट है।

(c) अन्य गणितीय तत्व

- **द्विपद गुणांक (Binomial Coefficients) और पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle):** पिंगल का प्रकारों का विस्तार गणितीय रूप में द्विपद गुणांक की संरचना जैसा कार्य करता है, जो बाद में पास्कल त्रिभुज के नाम से प्रसिद्ध हुआ।
- **फिबोनाच्ची श्रंखला (Fibonacci Sequence):** पिंगल के मात्रामेरु में कुछ गणनाओं में फिबोनाच्ची संख्याओं के समान क्रम उभरता है।

9.1 गणितीय सिद्धांत और पिंगल का प्रभाव

पिंगल को द्वैतीयक संख्याओं (बाइनरी नंबर सिस्टम) का पहला ज्ञात उपयोगकर्ता माना जाता है, क्योंकि उन्होंने छन्दःशास्त्र में लघु और गुरु मात्राओं के संयोजनों को संख्यात्मक रूप में परिवर्तित करने का प्रारंभिक तरीका प्रस्तुत किया। इन मात्राओं के संयोजन को आधुनिक बाइनरी प्रणाली (0 और 1) से संरचनात्मक रूप से जोड़ा जा सकता है, हालांकि पिंगल ने स्वयं 0 और 1 के अंक का प्रत्यक्ष उपयोग नहीं किया। उनके द्वैतीयक संयोजन के अध्ययन ने संयोजनात्मक गणित और permutations के सिद्धांतों की नींव रखी, जो गणित की एक प्रमुख शाखा है।

Scanned by AnyScanner

पिंगल की धरोहर और आधुनिक गणित पर प्रभाव

पिंगल का कार्य न केवल संस्कृत छन्दशास्त्र में क्रांतिकारी था, बल्कि उनके गणितीय विचारों ने गणित के महत्वपूर्ण क्षेत्रों, जैसे संयोजनात्मक गणित, शून्य के औपचारिककरण और द्वैतीयक प्रणाली के विकास में भी गहरा प्रभाव डाला। उनकी प्रणाली और सिद्धांतों ने आधुनिक कंप्यूटिंग, सूचना सिद्धांत और गणित के अन्य शाखाओं के विकास में बुनियादी मार्ग प्रशस्त किया। संक्षेप में, पिंगल का कार्य गणित और साहित्य का एक एतिहासिक सम्मिलन था, जिसमें उनके द्वैतीयक संख्या सिद्धांत और संयोजनात्मक गणित ने दोनों ही क्षेत्रों के विकास में महत्वपूर्ण योगदान दिया। उनकी इस विरासत से स्पष्ट होता है कि प्राचीन भारत में गणितीय सोच अत्यंत उन्नत थी, जिसने आधुनिक विज्ञान और तकनीकी प्रगति को अझभूत रूप से प्रभावित किया।

10. निष्कर्ष

गणित, विज्ञान और प्रौद्योगिकी की सार्वभौमिक भाषा, प्राचीन सभ्यताओं में गहराई से निहित है। इनमें, भारत ने संख्या प्रणाली और मापन इकाइयों के विकास में महत्वपूर्ण योगदान दिया है, जिसने आधुनिक वैज्ञानिक सोच को गहराई से प्रभावित किया है। यह पुस्तक संख्यात्मक प्रणालियों की रोचक यात्रा, शून्य की उत्पत्ति और प्राचीन भारत में विकसित परिष्कृत मापन तकनीकों पर प्रकाश डालती है, जो उनके ऐतिहासिक महत्व और समकालीन गणित तथा संबद्ध विषयों पर उनके गहरे प्रभाव को दर्शाती है।

संख्या प्रणाली, जो भारत की सबसे उल्लेखनीय बौद्धिक देनों में से एक है, सामान्य युग (Common Era) से बहुत पहले ही विकसित हो चुकी थी। इसका प्रभाव भारतीय उपमहाद्वीप से आगे बढ़कर 8वीं शताब्दी ईस्वी में अरब विद्वानों तक पहुँचा और फिर 11वीं शताब्दी ईस्वी तक पश्चिमी देशों में फैल गया। दाशमिक (दशमलव) प्रणाली, स्थानीय मान (प्लेस वैल्यू) की अवधारणा और गणितीय तत्व के रूप में शून्य का आविष्कार, भारत की महत्त्वपूर्ण देन हैं, जिन्होंने अंकगणित और बीजगणित में जटिल गणनाओं को संभव बनाया। यह पुस्तक इन प्रगतियों का गहन अन्वेषण प्रस्तुत करती है, जिसे ऐतिहासिक प्रमाणों, अभिलेखों और प्राचीन पांडुलिपियों के समर्थन से समझाया गया है।

भास्कर द्वितीय और ब्रह्मगुप्त जैसे महान गणितज्ञों के कार्यों का विश्लेषण करके यह पुस्तक यह दर्शाती है कि उनकी नवाचारपूर्ण खोजों ने आधुनिक संख्यात्मक विधियों

Scanned by AnyScanner

की नींव कैसे रखी। यह ग्रंथ इस बात पर भी प्रकाश डालता है कि इन गणितीय सि को खगोल विज्ञान, वास्तुकला और वाणिज्य जैसे विविध क्षेत्रों में कैसे लागू किया ग इसके अतिरिक्त, यह पुस्तक प्राचीन भारत में विकसित संख्यात्मक निरूपण की अ विधियों को प्रस्तुत करती है, जैसे भूतसंख्या और कटपयादि प्रणाली, जिनमें संख्या को भाषाई और काव्यात्मक अभिव्यक्तियों के साथ जोड़ा गया था। ऐसे बहु-विष दृष्टिकोण गणित और संस्कृति के बीच बौद्धिक समन्वय को दर्शाते हैं, जिससे भार विद्वानों की बहुआयामी सोच और सृजनात्मकता झलकती है।

संख्याओं से परे, यह पुस्तक प्राचीन भारतीय मापन प्रणालियों को भी विस रूप से समझाती है, जो समय, दूरी और भार के लिए उपयोग की जाती थीं। यह व्याप अभियांत्रिकी (इंजीनियरिंग) और वैज्ञानिक गणनाओं में इन प्रणालियों की भूमिका दर्शाती है, जिससे प्राचीन भारतीय सभ्यताओं द्वारा प्राप्त सटीकता और मानकीकर (स्टैंडर्डाइज़ेशन) उजागर होता है।

इसके अतिरिक्त, पुस्तक पिंगलाचार्य के संयोजनात्मक गणित (कम्बिनेटोरियल मैथमैटिक्स) और द्विआधारी प्रणाली (बाइनरी सिस्टम) में योगदान की भी व्याख्या करत है, यह दर्शाते हुए कि प्राचीन गणितीय चिंतन आज भी आधुनिक संगणना (कंप्यूटिंग और सूचना सिद्धांत (इन्फॉर्मेशन थ्योरी) को प्रभावित कर रहा है। इन ऐतिहासिक प्रगतियो का विश्लेषण करके, यह पुस्तक अतीत और वर्तमान के बीच एक सेतु का निर्माण करती है, यह दर्शाते हुए कि प्राचीन भारतीय गणितीय सिद्धांत आज के तकनीकी परिदृश्य में कितने प्रासंगिक हैं। यह विद्वानों, छात्रों और गणित-प्रेमियों को भारत की गणितीय विरासत की गहराई और उसके वैज्ञानिक जगत में स्थायी प्रभाव को सराहने के लिए प्रेरित करने का प्रयास करती है।

हमें आशा है कि यह पुस्तक गणितीय चिंतन के विकास और उसके विभिन्न वैज्ञानिक विषयों पर गहरे प्रभाव को समझने के इच्छुक पाठकों के लिए एक मूल्यवान संसाधन सिद्ध होगी। इन मौलिक अवधारणाओं को समझकर, पाठक उन बौद्धिक परंपराओं की अधिक सराहना कर सकते हैं, जिन्होंने आधुनिक गणित को आकार दिया है और आज भी हमारे ज्ञान को प्रभावित कर रही हैं।

Scanned by AnyScanner